

8. cvičení - teorie

Definice. Funkce F je **primitivní funkce** na otevřeném neprázdném intervalu I k funkci f , pokud $F' = f$ na celém I . Značíme $\int f \stackrel{c}{=} F$, respektive $\int f(x) \, dx \stackrel{c}{=} F(x)$.

Poznámka. Je-li F primitivní funkce k f a $c \in \mathbb{R}$, pak i $F + c$ je primitivní funkce k f . Navíc platí, že primitivní funkce jsou jednoznačné až na aditivní konstantu - tj. všechny primitivní funkce k určité funkci f se od sebe navzájem liší leda o přičtenou konstantu.

Věta (linearita integrálu). Nechť f, g jsou spojité funkce a $a, b \in \mathbb{R}$. Pak platí

$$\int af(x) + bg(x) \, dx = a \int f(x) \, dx + b \int g(x) \, dx.$$

Věta (per partes). Nechť u, v jsou spojité funkce na I . Pak platí

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v.$$

Věta (o substituci). Buď F primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b) a φ diferencovatelná funkce na (α, β) . Je-li $\varphi((\alpha, \beta)) \subset (a, b)$, pak platí

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) \, dx = F(\varphi(x)) \text{ pro } x \in (\alpha, \beta).$$

Poznámka. $\int \frac{1}{x} \, dx = \log|x|$, neboť:

$$(\log|x|)' = \begin{cases} (\log x)' = \frac{1}{x}, & x > 0 \\ (\log(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$